Υπολογίστε το $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$, όπου $\infty = \pm\infty$

Παρατηρώ ότι εμφανίζεται η απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$

Θεωρώ το μετασχηματισμό $(x,y) = \left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right)$, κι έχω

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y) = \lim_{(z,w)\to(0,0)} f\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right) = \lim_{(z,w)\to(0,0)} \frac{(z+w)^2}{z^2+w^2} = \lim_{(z,w)\to(0,0)} g(z,w)$$

Θεωρώ όλες τις ευθείες $w=\lambda z$, $\lambda \in \mathbb{R}$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $(z,\lambda z)$. Προφανώς, $(z,\lambda z)\to(0,0)$ όταν $z\to 0$, οπότε:

$$\lim_{(z,\lambda z)\to(0,0)} g(z,\lambda z) = \lim_{z\to 0} g(z,\lambda z) = \lim_{z\to 0} \frac{(z+\lambda z)^2}{z^2+\lambda^2 z^2}$$

$= 1 + \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$, κι εφόσον η τιμή του ορίου δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται με το λ, το $\lim\limits_{(z,\lambda z)\to(0,0)} g(z,\lambda z)$ δεν υπάρχει

Αν $f(x,y) = \dfrac{4y^2x}{(x+y^2)^2}$, υπολογίστε το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

// Παρατηρώ ότι εμφανίζεται η απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$

Έχω ότι:

"Βαδίζοντας" στο $(0,0)$ κατά μήκος της ευθείας $y=\lambda x$, δηλαδή $(x,y)=(x,\lambda x)$, τότε έχω ότι $(x,\lambda x)\to(0,0)$ για $x\to 0$, συνεπώς:

$$\lim_{(x,\lambda x)\to(0,0)} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{4\lambda^2 x}{(1+\lambda^2 x)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

Όμως, "Βαδίζοντας" στο $(0,0)$ κατά μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}$, $x>0$, δηλαδή $(x,y)=(x,\sqrt{x})$, τότε έχω

$$\lim_{(x,\sqrt{x})\to(0,0)} f(x,\sqrt{x}) = \lim_{x\to 0^+} f(x,\sqrt{x}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4x^2}{(x+x)^2} = 1$$

Άρα, δεν υπάρχει το όριο της $f(x,y)$ στο $(0,0)$

Αν $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, υπολογίστε το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

// Παρατηρώ ότι εμφανίζεται η απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$
Επειδή f είναι της μορφής $f(x^2+y^2)$, θεωρώ την αλλαγή μεταβλητής $z = x^2+y^2$, οπότε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x^2+y^2\to 0} f(x^2+y^2) = \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

Αν $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 y + z^3}{x^2+y^2+z^2}$, υπολογίστε το $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$

// Είναι $|f(x,y,z)| = \left|\dfrac{x^2 y + z^3}{x^2+y^2+z^2}\right| = \dfrac{|x^2 y + z^3|}{x^2+y^2+z^2}$

$$\leq \frac{|x^2 y| + |z|^3}{x^2+y^2+z^2} = \frac{|x|^2|y| + |z|^3}{x^2+y^2+z^2} = \frac{|x|^2|y| + |z||z|^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\leq \frac{|y|(x^2+y^2+z^2) + |z|(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} = |y| + |z| \to 0$$

, όταν $(x,y,z)\to(0,0,0)$, άρα από Θ. παρεμβολής έχω ότι $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$.

Να ορισθεί κατάλληλα η $f(x_1,\dots,x_n) = \dfrac{x_1 \sin x_1 + \dots + x_n \sin x_n}{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, ώστε να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n$.

// Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$, όπου f συνεχής ως πηλίκο συνεχών.

Η f ισοδύναμα μπορεί να γραφεί ως:

$$f(x_1,\dots,x_n) = \frac{\sin x_1}{x_1} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\left(\frac{\sin x_\nu}{x_\nu} - \frac{\sin x_1}{x_1}\right) x_\nu^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Ισχύουν οι σχέσεις $\dfrac{\sin x_\nu}{x_\nu} \to 1$ όταν $x_\nu \to 0$,

$$0 \le \frac{x_\nu^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2} \le 1.$$

Έτσι, το όριο της συνάρτησης f όταν $(x_1,\dots,x_n) \to (0,\dots,0)$ υπάρχει και είναι ίσο με 1.

Ορίζοντας λοιπόν τη συνάρτηση στην αρχή $(0,\dots,0)$ ίση με 1, αυτή θα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n$.

Να ορισθεί κατάλληλα η συνάρτηση $f(x,y) = (1+x^2)\dfrac{\sin y}{y}$, ώστε να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$

// Το πεδίο ορισμού της f είναι το $E = \{(x,y),\ y \neq 0\}$
Προφανώς f συνεχής στο E, ως γινόμενο συνεχών στο E
Υπολογίζω το $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, κι έχω

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} (1+x^2) \cdot \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\sin y}{y},$$

με τις συναρτήσεις εντός των ορίων να είναι πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, και συνεπώς:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}(1+x^2)\cdot \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = (1+x_0^2)\cdot 1 = 1+x_0^2$$

Άρα $f(x,0) = 1+x^2$. [Οπότε $f(x,y) = \begin{cases} (1+x^2)\dfrac{\sin y}{y}, & y\neq 0 \\ 1+x^2, & y=0 \end{cases}$ συνεχής στον $\mathbb{R}^2$]

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x,y) = \ln(e^x + e^y)$, ικανοποιεί τις ισότητες: (α) $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$

(β) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$

// Έχω: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{e^x}{e^x + e^y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{e^y}{e^x + e^y}$, άρα:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} = \frac{e^x + e^y}{e^x + e^y} = 1$$

Επίσης, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^x}{e^x + e^y}\right) = \dfrac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}$

και συμμετρικά $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{e^{y+x}}{(e^y + e^x)^2} = \dfrac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Ακόμη, $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^y}{e^x + e^y}\right)\right)^2 = \left(\dfrac{-e^y e^x}{(e^x + e^y)^2}\right)^2 = \dfrac{e^{2(x+y)}}{(e^x + e^y)^4}$

Τελικά, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = \dfrac{e^{2x+2y}}{(e^x + e^y)^4} - \dfrac{e^{2x+2y}}{(e^x + e^y)^4} = 0$

Να προσεγγισθεί η ποσότητα $\dfrac{1+\sqrt{8.85}}{3+\ln(1.1)}$, σε περιοχή καταλλήλου σημείου.

// Ορίζω τη συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{3+\ln y}$, $x \geq 0$, $y > 0$.

Παρατηρώ ότι $f(9,1) = \dfrac{1+\sqrt{9}}{3+\ln 1} = \dfrac{4}{3}$, οπότε επιλέγω το σημείο $P_0 = (9,1)$. Σε μια μικρή περιοχή $\Pi_\varepsilon(P_0)$ που περιέχει το σημείο $(8.85, 1.1)$, (π.χ για $0.15 < \varepsilon < 0.2$), η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $1^{ης}$ τάξης ως πηλίκο συνεχών διαφορίσιμων συναρτήσεων.

Άρα f διαφορίσιμη στην $\Pi_\varepsilon(P_0)$ και συνεπώς $\exists!$ εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(P_0, f(P_0))$, το οποίο προσεγγίζει την $f(P)$ στην $\Pi_\varepsilon(P_0)$.

Άρα: $$f(x,y) - f(9,1) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(9,1)\,(x-9) + \frac{\partial f}{\partial y}(9,1)\,(y-1)$$

Άρα, $$f(8.85, 1.1) \simeq f(9,1) + \left.\frac{1}{2\sqrt{x}\,(3+\ln y)}\right|_{(9,1)} (8.85-9)$$
$$+ \left(-\frac{1+\sqrt{x}}{y(3+\ln y)^2}\right)_{(9,1)} (1.1-1) = \frac{4}{3} + \frac{1}{18}(-0.15) - \frac{4}{9}\,0.1$$
$$= \boxed{\frac{461}{360}}$$

Έστω f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $3^{ης}$ τάξης στο $\mathbb{R}^2$. Αν f είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$, δείξτε ότι οι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ είναι επίσης αρμονικές στο $\mathbb{R}^2$.

// (Για την $\frac{\partial f}{\partial x}$) f αρμονική στο $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Οπότε $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ (1)

Είναι, $\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \nabla^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \nabla\cdot\left(\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$$

$$\overset{(1)}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = -\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y} + \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x}$$

$$\overset{\text{f συν. μ. π. } 3^{ης} \text{ τάξης}}{=} (\text{Θ. Schwarz}) = \frac{-\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x} + \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x} = 0, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

, δηλαδή $\frac{\partial f}{\partial x}$ αρμονική στο $\mathbb{R}^2$.

Ομοίως, συμμετρικά, $\frac{\partial f}{\partial y}$ αρμονική στο $\mathbb{R}^2$.

Αν $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $f(\bar{r}) = \|\bar{r}\|$, $\bar{r} = (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$,

δείξτε ότι: (α) $\nabla\left(\frac{1}{f}\right)(\bar{r}) = -\frac{\bar{r}}{f^3(\bar{r})}$

(β) $\nabla(\ln f(\bar{r})) = \frac{\bar{r}}{f^2(\bar{r})}$

// (α): $\nabla\left(\frac{1}{f}\right)(\bar{r}) = \nabla\left(\frac{1}{\|\bar{r}\|}\right) = \frac{-\nabla(\|\bar{r}\|)}{\|\bar{r}\|^2}$

$$= -\frac{1}{\|\bar{r}\|^2}\nabla\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) = -\frac{1}{\|\bar{r}\|^2}\left(\frac{x_1}{\|\bar{r}\|}, \dots, \frac{x_n}{\|\bar{r}\|}\right)$$

$$= -\frac{1}{\|\bar{r}\|^3}(x_1, \dots, x_n) = -\frac{\bar{r}}{\|\bar{r}\|^3} = -\frac{\bar{r}}{f^3(\bar{r})}$$

(β): $\nabla(\ln f(\bar{r})) = \nabla(\ln\|\bar{r}\|) = \frac{\nabla(\|\bar{r}\|)}{\|\bar{r}\|} = \frac{\frac{\bar{r}}{\|\bar{r}\|}}{\|\bar{r}\|}$

$$= \frac{\bar{r}}{\|\bar{r}\|^2} = \frac{\bar{r}}{f^2(\bar{r})}$$

Αν $u = f(x-y,\ y-z,\ z-x)$, δείξτε ότι $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$

// Έστω $\alpha = x-y$, $\beta = y-z$, $\gamma = z-x$. Τότε έχω $\underset{\text{Αλυσίδας}}{\overset{\text{Κανόνας}}{=}}$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial x} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial y} \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial z}
\end{aligned}
\right. \Longrightarrow
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot 1 + \cancelto{0}{\frac{\partial u}{\partial \beta}\cdot 0} + \frac{\partial u}{\partial \gamma}\cdot(-1) \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot(-1) + \frac{\partial u}{\partial \beta}\cdot 1 + \cancelto{0}{\frac{\partial u}{\partial \gamma}\cdot 0} \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= \cancelto{0}{\frac{\partial u}{\partial \alpha}\cdot 0} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\cdot(-1) + \frac{\partial u}{\partial \gamma}\cdot 1
\end{aligned}
\right. \Longrightarrow
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \cancel{\frac{\partial u}{\partial \alpha}} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial \gamma}} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial \alpha}} + \cancel{\frac{\partial u}{\partial \beta}} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial \beta}} + \cancel{\frac{\partial u}{\partial \gamma}} = 0.
$$

Να βρεθούν οι παράγωγοι των πραγματικών συναρτήσεων $y(x)$ και $z(x)$, που ορίζονται με πεπλεγμένη μορφή από το σύστημα:

$$\begin{cases} \sin(x+y(x)) + z(x) = 1 \\ \sin(x-y(x)) + z(x) = 2 \end{cases}$$

// Έστω $\begin{cases} F_1(x,y(x),z(x)) = \sin(x+y(x)) + z(x) - 1 = 0 \\ F_2(x,y(x),z(x)) = \sin(x-y(x)) + z(x) - 2 = 0 \end{cases}$

Από τον Κανόνα της Αλυσίδας, έχω:

$$\begin{cases} DF_1(x,y(x),z(x)) = 0 \\ DF_2(x,y(x),z(x)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y(x)}\frac{\partial y(x)}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z(x)}\frac{\partial z(x)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y(x)}\frac{\partial y(x)}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial z(x)}\frac{\partial z(x)}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial F_1}{\partial y(x)}\cdot y'(x) + \frac{\partial F_1}{\partial z(x)}\cdot z'(x) = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial F_2}{\partial y(x)}\cdot y'(x) + \frac{\partial F_2}{\partial z(x)}\cdot z'(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y(x)}\cdot y'(x) + \frac{\partial F_1}{\partial z(x)}\cdot z'(x) = -\frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y(x)}\cdot y'(x) + \frac{\partial F_2}{\partial z(x)}\cdot z'(x) = -\frac{\partial F_2}{\partial x} \end{cases}$$

, οπότε επιλύοντας το 2x2 αυτό σύστημα ως προς $y'(x)$, $z'(x)$

με τη μέθοδο Cramer έχω:

$\Longrightarrow$

$$y'(x) = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial z(x)} \\ -\frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial z(x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y(x)} & \frac{\partial F_1}{\partial z(x)} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y(x)} & \frac{\partial F_2}{\partial z(x)} \end{vmatrix}} \quad , \quad z'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y(x)} & -\frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y(x)} & -\frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y(x)} & \frac{\partial F_1}{\partial z(x)} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y(x)} & \frac{\partial F_2}{\partial z(x)} \end{vmatrix}}$$

Εφόσον $F_1(x, y(x), z(x)) = \sin(x + y(x)) + z(x) - 1$ και $F_2(x, y(x), z(x)) = \sin(x - y(x)) + z(x) - 2$, είναι:

$$y'(x) = \tan x \cdot \tan y \quad , \quad z'(x) = \frac{\cos(2x)}{\cos x \cos y}$$

Αν $z = y f(x^2 - y^2)$, όπου η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι: $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{y}$

// Είναι, $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = y \frac{\partial}{\partial x}(y f(x^2-y^2))$

$+ x \frac{\partial}{\partial y}(y f(x^2-y^2)) = y \left(\cancel{\frac{\partial y}{\partial x}}^{0} f(x^2-y^2) + y \frac{\partial f(x^2-y^2)}{\partial x} \right)$

$+ x \left(\frac{\partial y}{\partial y} f(x^2-y^2) + \frac{\partial f(x^2-y^2)}{\partial y} y \right) = y^2 (f'(x^2-y^2) 2x)$

$+ x \left(f(x^2-y^2) - 2y^2 f'(x^2-y^2) \right) = 2xy^2 \cancel{f'(x^2-y^2)}$

$+ x f(x^2-y^2) - 2xy^2 \cancel{f'(x^2-y^2)} = x f(x^2-y^2) = \frac{xz}{y}$

Αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(x,y) = xy + \sin(xy)$, σε πολυώνυμο Taylor $2^{ου}$ βαθμού, γύρω από το $(0,1)$

/ Θέτω $xy = z$, με $(0,1) \to 0$, και αναπτύσσω τη συνάρτηση $f(z) = z + \sin z$, σε πολυώνυμο Taylor $2^{ου}$ βαθμού γύρω από το 0. Είναι:

$$T_{f,2,0}(z) = f(0) + \frac{f'(0)(z-0)}{1!} + \frac{f''(0)(z-0)^2}{2!}$$

$$= 0 + (1+\cos z)_{(z=0)}\, z + (-\sin z)_{(z=0)} \frac{z^2}{2}$$

$= 2z = 2xy$, άρα το πολυώνυμο Taylor $2^{ου}$ βαθμού της $f(x,y) = xy + \sin(xy)$, γύρω από το $(0,1)$, είναι το $\boxed{2xy}$.

Έστω $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, E ανοικτό και f διαφορίσιμη στο σημείο P_0 του E. Να δειχθεί ότι:

f έχει τοπικό ακρότατο στο $P_0 \Longrightarrow \nabla f(P_0) = \bar{0}$

// Έστω ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο P_0 και ισχύει $\nabla f(P_0) \neq \bar{0}$.

Θεωρώ την κατεύθυνση $\bar{e}_0 = \dfrac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|}$, και ορίζω

τη συνάρτηση μιας μεταβλητής: $\phi(t) = f(P_0 + t\bar{e}_0)$

Τότε: $$\phi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\bar{e}_0) - f(P_0)}{t} = \nabla_{\bar{e}_0} f(P_0)$$

$$= \nabla f(P_0) \cdot \bar{e}_0 = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|} = \frac{\|\nabla f(P_0)\|^2}{\|\nabla f(P_0)\|}$$

$= \|\nabla f(P_0)\| > 0$, άρα ϕ γνησίως αύξουσα σε μια περιοχή του μηδενός, και συνεπώς ισχύει: $\phi(t) > \phi(0)$. (1)

Όμως, εφόσον η f έχει τοπικό μέγιστο στο P_0, θα υπάρχει μια περιοχή του P_0 όπου ισχύει $f(P_0) \geq f(P)$, άτοπο λόγω (1)

Άρα $\nabla f(P_0) = \bar{0}$. Όμοιως αν f έχει τοπικό ελάχιστο στο P_0.

Υπολογίστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

// f πολυωνυμική, άρα και διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2$, συνεπώς:

$$\nabla f = \bar{0} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 6y = 0 \end{cases} \text{, άρα:}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\ y(x-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\ y = 0 \text{ ή } x = 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = \begin{cases} (1,1) \\ (0,0) \\ (-1,1) \\ (0,2) \end{cases}$$

, άρα έχω 4 πιθανά ακρότατα.

Είναι: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-6 & 6y \\ 6y & 6x-6 \end{pmatrix}$

- Για τό $(0,0)$, έχω $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, με $-6<0$, $\det H_f(0,0) = 36 > 0$

, άρα το $(0,0)$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

- Για το $(1,1)$, έχω $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, με $0=0$, $\det H_f(1,1) = -36 < 0$

, άρα το $(1,1)$ είναι σαγματικό σημείο. Ομοίως το $(-1,1)$

- Για το $(0,2)$ έχω $H_f(0,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, με $6>0$, $\det H_f(0,2) = 36 > 0$

, άρα το $(0,2)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

Να υπολογισθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y) = x^2 - 4x + 2y^2 - 4y + 1$, στο κλειστό χωρίο που περικλείεται από τις ευθείες $x=2$, $y=0$, $x=2y$.

// f συνεχής επί κλειστού φραγμένου συνόλου, άρα από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών, παίρνει μέγιστο και ελάχιστο μέσα στο σύνολο (χωρίο). Το χωρίο είναι τρίγωνο.
Αρχικά, υπολογίζω τα τοπικά ακρότατα της f πάνω στο σύνορο.
3 περιπτώσεις:

- $y=0$. Τότε $f(x,0) = x^2-4x+1$, με $f'(x,0) = 2x-4$.
Εφόσον $x \in [0,2]$ η $f(x,0)$ είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in [0,2]$, συνεπώς έχω τοπικό ελάχιστο στο $(2,0)$ με τιμή $f(2,0) = -3$ και τοπικό μέγιστο στο $(0,0)$ με τιμή $f(0,0) = 1$.
- $x=2$. Τότε $f(2,y) = 2y^2-4y-3$, με $f'(2,y) = 4y-4$
Εφόσον $y \in [0,1]$ η $f(2,y)$ είναι γνησίως φθίνουσα για $y \in [0,1]$, συνεπώς έχω τοπικό ελάχιστο στο $(2,1)$ με τιμή $f(2,1) = -5$ και τοπικό μέγιστο στο $(0,0)$ με τιμή $f(0,0) = 1$
- $x=2y$. Τότε $f(2y,y) = 6y^2-12y+1$, με $f'(2y,y) = 12y-12$, άρα έχω πάλι τοπικό ελάχιστο στο $(2,1)$ με τιμή $f(2,1) = -5$ και τοπικό μέγιστο στο $(2,0)$ με τιμή $f(2,0) = 1$

Στη συνέχεια, υπολογίζω τα τοπικά ακρότατα της f εντός του τριγώνου.

$$\nabla f = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4=0 \\ 4y-4=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (2,1),$$ σημείο τοπικού ελαχίστου

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, έχω ότι η f έχει ολικό μέγιστο στο $(0,0)$ με τιμή 1 και ολικό ελάχιστο στο $(2,1)$ με τιμή -5.

Έστω $V(x,y,z) = xyz$, $x,y,z > 0$. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του όγκου πάνω στην επιφάνεια $2x+2y+z=84$

// Αντικαθιστώντας την τιμή του z στην εξίσωση του V, οδηγούμαι στην εύρεση τοπικών ακροτάτων συνάρτησης δύο μεταβλητών. Τότε: $\phi(x,y) = xy(84-2x-2y)$,

οπότε έχω: $\nabla\phi = \bar{0} \iff \begin{cases} 84y - 4xy - 2y^2 = 0 \\ 84x - 2x^2 - 4xy = 0 \end{cases}$

κι επειδή $x,y > 0$, μοναδική λύση η $(x,y) = (14,14)$.

Είναι, $H_\phi(x,y) = \begin{pmatrix} -4y & -4y-4x+84 \\ -4y-4x+84 & -4x \end{pmatrix}$, $\forall (x,y)$

, οπότε $H_\phi(14,14) = \begin{pmatrix} -56 & \overset{=\frac{56}{2}}{-28} \\ -28 & -56 \end{pmatrix}$, με $-56<0$ και $\det H_\phi(14,14) > 0$

, άρα το $(14,14)$ είναι σημείο μεγίστου, τιμής $\phi(14,14) =$ 5,488 μονάδες όγκου

Με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, να υπολογισθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$f(x,y,z) = xyz$, $x,y,z \neq 0$, υπό τη συνθήκη

$\phi(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-1 = 0$.

// Έστω $\Phi(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\phi(x,y,z)$

$= xyz + \lambda x^3 + \lambda y^3 + \lambda z^3 - \lambda$.

Υπολογίζω τα πιθανά ακρότατα της Φ

$$\nabla\Phi = \bar{0} \iff \begin{cases} yz + 3\lambda x^2 = 0 \quad (1) \\ xz + 3\lambda y^2 = 0 \\ xy + 3\lambda z^2 = 0 \\ x^3+y^3+z^3-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xyz + 3\lambda x^3 = 0 \\ xyz + 3\lambda y^3 = 0 \\ xyz + 3\lambda z^3 = 0 \\ x^3+y^3+z^3-1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3xyz + 3\lambda(x^3+y^3+z^3) = 0 \\ x^3+y^3+z^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xyz + \lambda = 0, \text{ δηλ} \\ xyz = -\lambda \quad (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (1), (2) έχω $yz - 3x^3yz = 0 \Rightarrow yz(1-3x^3) = 0$

$\overset{y,z\neq 0}{\Rightarrow} 1-3x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

Με συμμετρικό τρόπο, $y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = z$, άρα έχω πιθανό ακρότατο

στο $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$. Εξετάζω τον Εσσιανό της Φ κι έχω:

$$H_\Phi\left(\frac{1}{3\sqrt{3}},\frac{1}{3\sqrt{3}},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial \lambda} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial \lambda} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial \lambda} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial \lambda\partial x} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial \lambda\partial y} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial \lambda\partial z} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 6\lambda & z & y & 3x^2 \\ z & 6\lambda & x & 3y^2 \\ y & x & 6\lambda & 3z^2 \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 & 0 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}},\frac{1}{3\sqrt{3}},\frac{1}{3\sqrt{3}},-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 1/3\sqrt{3} & 1/3\sqrt{3} & 3\sqrt{3} \\ 1/3\sqrt{3} & -2 & 1/3\sqrt{3} & 3\sqrt{3} \\ 1/3\sqrt{3} & 1/3\sqrt{3} & -2 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 3\sqrt{3} & 3\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \to -2<0,\ \det H_\Phi<0,$$

άρα έχω τοπικό μέγιστο

στο $\left(\frac{1}{3\sqrt{3}},\frac{1}{3\sqrt{3}},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$, τιμής $f\left(\frac{1}{3\sqrt{3}},\frac{1}{3\sqrt{3}},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3}$

Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(\bar{r}) = \|\bar{r}\|$, $\bar{r} = (x_1, \dots, x_n)$, είναι αρμονική στον $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$, $n \geq 2$.

// $\forall\, \bar{r} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$, είναι: $\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$

$$= \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{x_1}{f}, \dots, \frac{x_n}{f} \right)$$

$$= \nabla \cdot \left(\frac{\bar{r}}{\|\bar{r}\|} \right) = \frac{(\nabla \cdot \bar{r})\|\bar{r}\| - \bar{r}\, \nabla(\|\bar{r}\|)}{\|\bar{r}\|^2} \quad (*)$$

$$= \frac{n\|\bar{r}\| - \bar{r}\, \frac{\bar{r}}{\|\bar{r}\|}}{\|\bar{r}\|^2} = \frac{n\|\bar{r}\| - \|\bar{r}\|}{\|\bar{r}\|^2} = \frac{(n-1)\cancel{\|\bar{r}\|}}{\|\bar{r}\|^{\cancel{2}}} = \frac{n-1}{\|\bar{r}\|} \neq 0$$

., άρα f όχι αρμονική στον $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$, $n \geq 2$.

$$(*)\quad \nabla \cdot \bar{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot (x_1, \dots, x_n) = \underbrace{\cancelto{1}{\frac{\partial x_1}{\partial x_1}} + \dots + \cancelto{1}{\frac{\partial x_n}{\partial x_n}}}_{n \text{ πλήθος}} = n.$$

Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου και της καθέτου της επιφάνειας $\cos x + \cos y + 2\sin z = 0$, στο σημείο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right)$

// Έστω $f(x,y,z) = \cos x + \cos y + 2\sin z$, διαφορίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ ως άθροισμα διαφορίσιμων συναρτήσεων.

Έτσι, η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right)$, είναι: $\nabla f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}, y - \frac{\pi}{2}, z\right) = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right)} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}, y - \frac{\pi}{2}, z\right) = 0$$

$$\Rightarrow (-\sin x, -\sin y, 2\cos z)_{\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right)} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}, y - \frac{\pi}{2}, z\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \left(y - \frac{\pi}{2}\right) + 2z = 0 \Rightarrow x + y - 2z - \pi = 0$$

Το κανονικό διάνυσμα του επιπέδου είναι το $\bar{N} = (1, 1, -2)$, άρα η διανυσματική εξίσωση της καθέτου ευθείας στο $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ είναι:

$$(\varepsilon): \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) + \lambda(1, 1, -2), \; \lambda \in \mathbb{R}$$

Υπολογίστε τη γωνία τομής των επιφανειών:

$2x^4 + 3y^3 - 4z^2 + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$,

στο σημείο $(0,0,1)$. Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.

// Έστω $f(x,y,z) = 2x^4 + 3y^3 - 4z^2 + 4$ και $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 + 1$. Τότε έχω:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(8x^3, 9y^2, -8z\right) \quad \text{και}$$

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = \left(2x, 2y, -2z\right).$$

Άρα, $\nabla f(0,0,1) = (0,0,-8)$ και $\nabla g(0,0,1) = (0,0,-2)$.

Τελικά,

$$\cos\theta = \frac{\nabla f(0,0,1) \cdot \nabla g(0,0,1)}{\|\nabla f(0,0,1)\| \, \|\nabla g(0,0,1)\|} = \frac{(0,0,-8)\cdot(0,0,-2)}{\sqrt{64}\,\sqrt{4}}$$

$= \frac{16}{16} = 1$, συνεπώς $\theta = 0$.

Όπως, τα εφαπτόμενα επίπεδα των f, g στο $(0,0,1)$, είναι

$$\begin{cases} \nabla f(0,0,1) \cdot (x, y, z-1) = 0 \Rightarrow z = 1 \\ \nabla g(0,0,1) \cdot (x, y, z-1) = 0 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$$

δηλαδή οι επιφάνειες έχουν κοινό εφαπτόμενο επίπεδο στο $(0,0,1)$

Δίνεται η επιφάνεια με εξίσωση $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2$
Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας, που είναι παράλληλο προς το επίπεδο $2x+y-z=4$, καθώς επίσης και το σημείο επαφής.

// Είναι, $\nabla f(x,y) = (2x, 8y)$, συνεχής στο $\mathbb{R}^2$, οπότε $f \in C^1$, οπότε f διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2$.
Άρα $\exists!$ εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας f στο σημείο $(P_0, f(P_0))$, με εξίσωση: $z = f(P_0) + \nabla f(P_0)(P-P_0)$, όπου $P_0 = (x_0, y_0)$. Εφόσον το παραπάνω επίπεδο είναι παράλληλο με το επίπεδο $2x+y-z=4$, θα πρέπει να ισχύει

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)}{2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)}{1} = \frac{-1}{-1} = \lambda, \text{ οπότε } \frac{2x_0}{2} = \frac{8y_0}{1} = 1$$

$\Rightarrow (x_0, y_0) = (1, \frac{1}{8})$. Άρα $z_0 = f(P_0) = f(1, \frac{1}{8}) = -\frac{15}{16}$, συνεπώς το σημείο επαφής είναι το $(P_0, f(P_0)) = (1, \frac{1}{8}, -\frac{15}{16})$ και η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο σημείο αυτό είναι:

$$z = -\frac{15}{16} + 2(x-1) + (y - \frac{1}{8})$$

Δείξτε ότι η εξίσωση $x+y+z-\cos(xy)=0$, επιλύεται μονότιμα ως προς $x=g(y,z)$ σε μια περιοχή του σημείου $P_0=(0,0,1)$, και υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial g}{\partial y}(0,1)$ και $\frac{\partial g}{\partial z}(0,1)$

// Η $f(x,y,z)=x+y+z-\cos(xy)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους σε μια περιοχή του σημείου P_0 και ισχύει

$$f(0,0,1)=0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,1)=\left(1+\sin(xy)\,y\right)_{(0,0,1)}=1$$

Άρα η εξίσωση $f=0$ επιλύεται μονότιμα ως προς $x=g(y,z)$ σε μια περιοχή του σημείου $P_0=(0,0,1)$ και ισχύει:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,1)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,1)}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,1)}=-\frac{\left(1+x\sin(xy)\right)_{(0,0,1)}}{\left(1+\sin(xy)\,y\right)_{(0,0,1)}}=-\frac{1}{1}=-1$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(0,1)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1)}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,1)}=-\frac{1}{1}=-1$$

Έστω ότι η $z = f(x,y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους και δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από τη σχέση $2x^2+3y^2-z^2=1$. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της z κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $(3,4)$ εάν $f(1,1)>0$; Ποια η κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της z στο $(1,1)$ εάν $f(1,1)>0$;

// Έστω $\phi(x,y,z) = 2x^2+3y^2-z^2-1$. Επειδή $z=f(1,1)>0$,
$\phi(x,y,z)=0 \iff z^2=2x^2+3y^2-1 \iff z=\pm\sqrt{2x^2+3y^2-1}$
και η αρνητική τιμή απορρίπτεται.
Άρα $z=f(x,y)=\sqrt{2x^2+3y^2-1}$, και για $(x_0,y_0)=(1,1)$
έχω $z_0=\sqrt{2x_0^2+3y_0^2-1}=\sqrt{2+3-1}=2$.
Επιπλέον,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x^2+3y^2-1}\right)=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+3y^2-1}}\left(=\frac{2x}{z}\right),$$

άρα $\frac{dz}{dx}(1,1)=1$. Όμοιως $\frac{dz}{dy}(1,1)=\frac{3}{2}$.

Η κλίση της z στο $(1,1)$ είναι $\nabla z(1,1)=\left(\frac{dz}{dx},\frac{dz}{dy}\right)(1,1)=\left(1,\frac{3}{2}\right)$

Επίσης, κατεύθυνση του $(3,4)=\frac{(3,4)}{\|(3,4)\|}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$, κι εφόσον z διαφορίσιμη στο $(1,1)$, είναι:

$$\nabla_{(3,4)} z(1,1)=\nabla z(1,1)\cdot\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=\left(1,\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=\frac{18}{10} \Longrightarrow$$

Η κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού μεταβολής της z στο (1,1) είναι η κατεύθυνση του διανύσματος κλίσης, δηλαδή

$$\bar{v} = \frac{\nabla z(1,1)}{\|\nabla z(1,1)\|} = \frac{(1,\frac{3}{2})}{\|(1,\frac{3}{2})\|} = \frac{(1,\frac{3}{2})}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$